



இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை – 2022(2023)

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளியிடும் திட்டம்



இந்த விடைத்தாள் பரீட்சைக்காரர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது.
பிரதம பரீட்சைக்காரர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில்
பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள்
மாற்றப்படலாம்.

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2022(2023)

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பகுதி I

$$\text{பகுதி A} = 10 \times 25 = 250$$

$$\text{பகுதி B} = 05 \times 150 = 750$$

$$\text{மொத்தம்} = 1000/10$$

$$\text{இறுதிப் புள்ளி} = 100$$



1. Using the Principle of Mathematical Induction, prove that $\sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$

$$n=1, \text{ இற்கு L.H.S.} = \frac{1}{2}, \text{ R.H.S.} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore n=1$. இற்கு முடிவு உண்மையாகும்

5

ஏதாவது $k \in \mathbb{Z}^+$ இனை எடுக்க. $n=k$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$$\text{i.e. } \sum_{r=1}^k \frac{1}{r(r+1)} = \frac{k}{k+1}. \quad \dots\dots\dots (1)$$

5

இப்போது

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^k \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

5

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}.$$

5

எனவே $n=k$, இற்கு முடிவு உண்மையெனின் $n=k+1$. இற்கு முடிவு உண்மை.

$n=1$. இற்கு முடிவு உண்மை என காட்டியுள்ளோம்

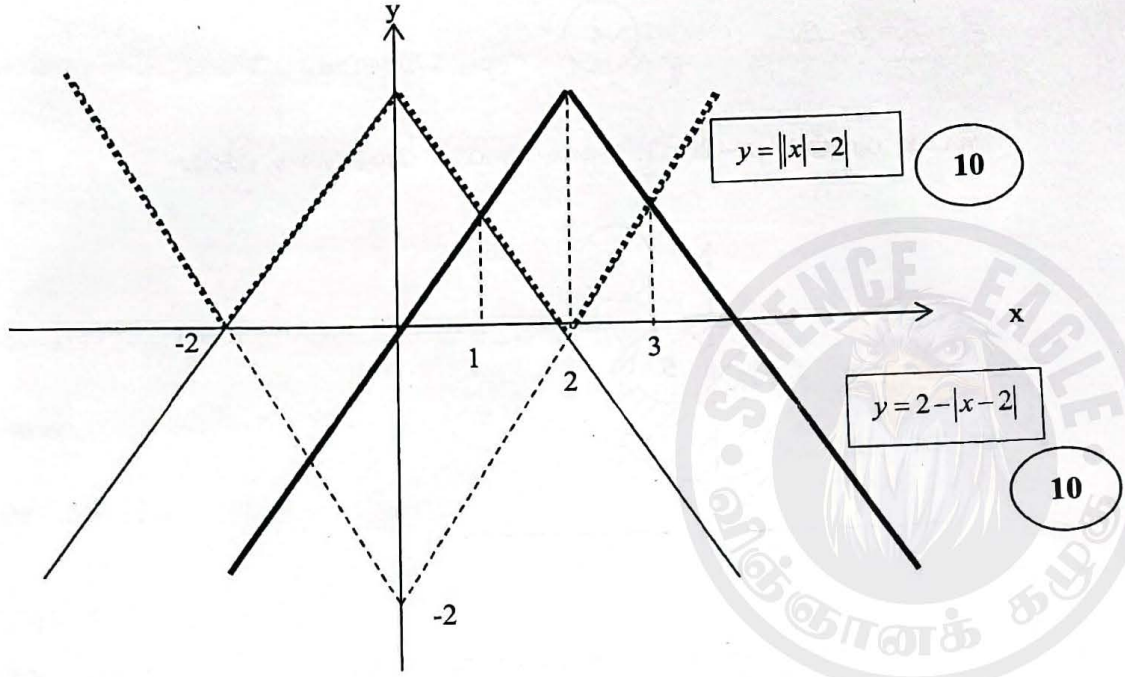
ஆகவே கணித தொகுத்தறி முறையின் படி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$. இற்கும் முடிவு உண்மையாகும்

5

25

2. Sketch the graphs of $y = 2 - |x - 2|$ and $y = ||x| - 2|$ in the same diagram.

Hence or otherwise, find all real values of x satisfying the inequality $||x| - 2| + |x - 2| \leq 2$.



$$||x| - 2| + |x - 2| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow ||x| - 2| \leq 2 - |x - 2|$$

வரைபிலிருந்து $1 \leq x \leq 3$.

5

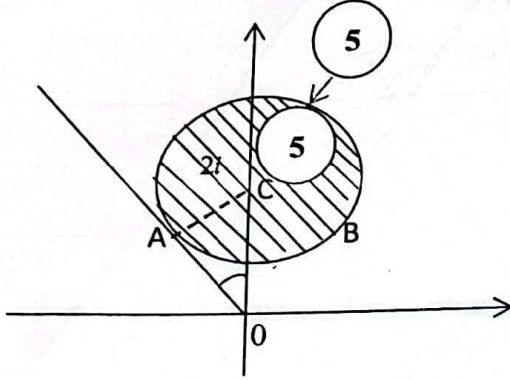
25

3. Shade in an Argand diagram, the region consisting of points that represent the complex number z satisfying the inequality $|\bar{z} + 2i| \leq 1$.
Find the greatest value of $\text{Arg } z$ for the complex numbers z represented by the points in this shaded region.

$$|\bar{z} + 2i| = |z - 2i|.$$

5

தரப்பட்ட பிரதேசம் $|z - 2i| \leq 1$. இனால் தரப்படும் பிரதேசத்தை ஒத்தது.



A. என்ற புள்ளியால் தரப்படும் சிக்கல் எண் z_0 என்க

$$\Delta OAC, \text{ இலிருந்து } \angle AOC = \frac{\pi}{6}.$$

5

$\text{Arg } z$ இன் தேவையான உயர் பொறுமானம் = $\text{Arg } z_0$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

5

முதல் 5 க்கான வேறு முறை:

$z = x + iy$, என்க. இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\bar{z} + 2i|^2 &= |x - (y - 2)i|^2 \\ &= x^2 + (y - 2)^2 \end{aligned}$$

5

தரப்பட்ட பிரதேசம் $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$. இனால் தரப்படும் பிரதேசத்தை ஒத்தது

4. Let $a \in \mathbb{R}$. Write down the expansion of $(2 + ax)^5$ in ascending powers of x up to and including x^2 term. Hence, find the values of a for which the coefficient of x^2 in the expansion of $(4 - 5x)(2 + ax)^5$ is -80 .

$$\text{தேவையான விரிவு} = {}^5C_0 2^5 + {}^5C_1 2^4(ax) + {}^5C_2 2^3(ax)^2$$

$$= 32 + 5 \times 16ax + 10 \times 8a^2x^2$$

$$= 32 + 80ax + 80a^2x^2$$

5

5

- 5

$$\text{இப்போது, } (4 - 5x)(2 + ax)^5 = 4(2 + ax)^5 - 5x(2 + ax)^5$$

$$x^2 \text{ இன் குணகம்} = 4 \times 80a^2 - 5 \times 80a$$

5

$$\text{இது } 4 \times 80a^2 - 5 \times 80a = -80 \text{ இனால் தரப்படும்}$$

5

$$\therefore 4a^2 - 5a + 1 = 0.$$

$$\therefore (4a - 1)(a - 1) = 0.$$

$$\therefore a = \frac{1}{4} \text{ or } a = 1.$$

5



5. Show that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x((1+x)\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}} = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x((1+x)\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)}{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x - \cos 2x)}{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x})} \quad (5) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x - \cos 2x)}{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x})} \times \frac{(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})}{(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x})} \quad (5) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{(2\sin^2 x + x)}{[(1+2x) - (1-2x)]} \cdot (\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \left(\frac{2\sin^2 x}{4x} + \frac{1}{4} \right) (\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}) \quad (5) \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2 \quad (10) \\
 &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

All three limits correct

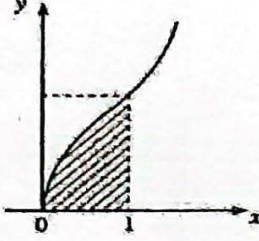
10

Any two

5

6. Using $\frac{d}{dx} \{x(x^2+1) \tan^{-1} x\} = (3x^2+1) \tan^{-1} x + x$, show that $\int_0^1 (3x^2+1) \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}(\pi-1)$.

The region enclosed by the curves $y = \sqrt{2(3x^2+1) \tan^{-1} x}$, $x = 1$ and $y = 0$ is rotated about the x -axis through 2π radians. Show that the volume of the solid thus generated is $\pi(\pi-1)$.



$$\frac{d}{dx} \{(x^2+1) \tan^{-1} x\} = (3x^2+1) \tan^{-1} x + x, \text{ இனைப் பயன்படுத்தி}$$

$$\int_0^1 [(3x^2+1) \tan^{-1} x + x] \, dx = x(x^2+1) \tan^{-1} x \Big|_0^1 \quad (5)$$

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1) \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 x \, dx = 2 \tan^{-1} 1$$

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1) \tan^{-1} x \, dx + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2 \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

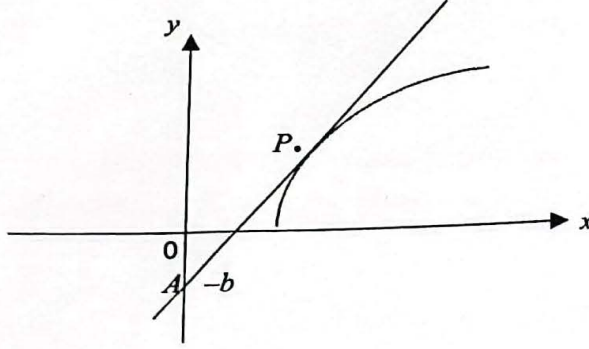
$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 (3x^2+1) \tan^{-1} x \, dx &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\pi-1). \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{தேவையான கனவளவு} = \pi \int_0^1 2(3x^2+1) \tan^{-1} x \, dx \quad (5)$$

$$= 2\pi \frac{1}{2}(\pi-1) \quad (5)$$

$$= \pi(\pi-1).$$

7. Let $a, b > 0$. A curve is parametrically given by $x = a \sec \theta$ and $y = b \tan \theta$ for $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. A tangent line to the curve at the point $P \equiv (a \sec \theta, b \tan \theta)$ passes through the point $(0, -b)$. Find coordinates of P .



$$x = a \sec \theta,$$

$$y = b \tan \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \sec \theta \tan \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = b \sec^2 \theta$$

5

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{b \sec^2 \theta}{a \sec \theta \tan \theta}$$

5

$$\therefore = \frac{b \sec \theta}{a \tan \theta}.$$

$$AP \text{ இன் படித்திறன் } AP = \frac{b + b \tan \theta}{a \sec \theta}.$$

$$\text{தரப்பட்ட நிபந்தனையிலிருந்து } \frac{b \sec \theta}{a \tan \theta} = \frac{b(1 + \tan \theta)}{a \sec \theta}.$$

5

$$\therefore \sec^2 \theta = \tan \theta + \tan^2 \theta$$

$$\therefore \tan \theta = 1$$

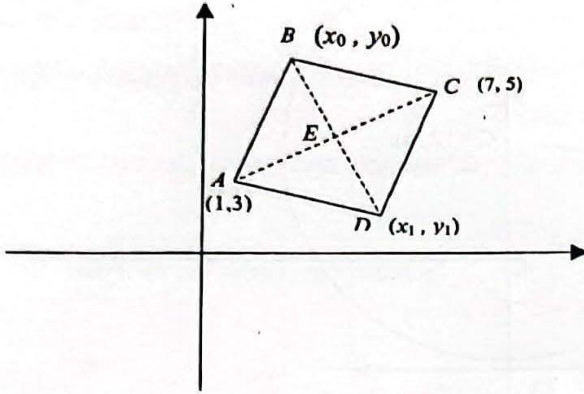
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore P \equiv (\sqrt{2}a, b)$$

5

25

8. Let $ABCD$ be a square with $A \equiv (1, 3)$ and $C \equiv (7, 5)$. Find the x -coordinates of B and D .



$B = (x_0, y_0)$, $D = (x_1, y_1)$ என்க

Since E is the mid-point of AC , we have $E \equiv (4, 4)$.

5

எனின் $AE^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

$ABCD$ ஆனது சதுரம் ஆகையால் $BE = AE$.

எனவே Hence, $(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 4)^2 = 10$.

(1)

5

Also, $AE \perp BE$.

$$\therefore \left(\frac{4-3}{4-1} \right) \times \left(\frac{y_0-4}{x_0-4} \right) = -1.$$

5

Hence, $y_0 - 4 = -3(x_0 - 4)$

(2)

$$(1), (2) \Rightarrow (x_0 - 4)^2 + 9(x_0 - 4)^2 = 10.$$

5

Hence, $y_0 - 4 = -3(x_0 - 4)$.

$$\therefore (x_0 - 4)^2 = 1.$$

$$\therefore (x_0 - 4) = \pm 1.$$

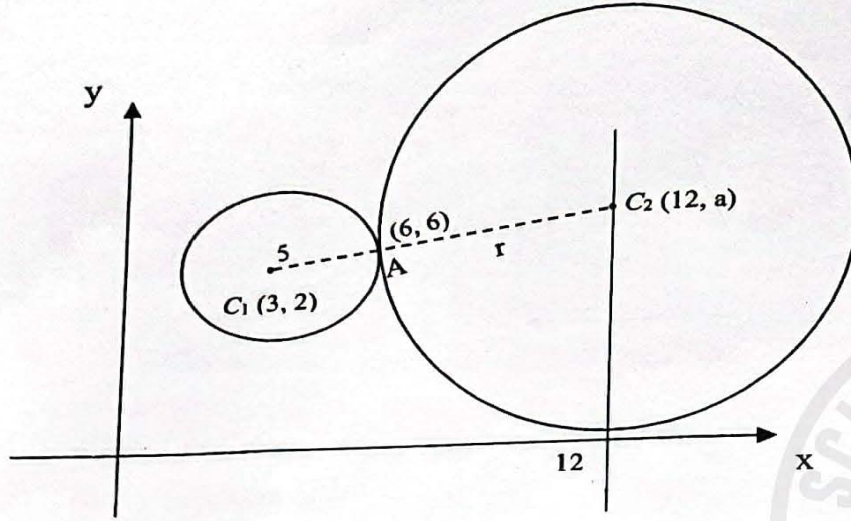
$$\therefore x_0 = 5 \text{ or } x_0 = 3.$$

5

Note that (x_1, y_1) also satisfies (1) and (2), when (x_0, y_0) is replaced by (x_1, y_1) .

Hence, x coordinates of B and D are 3 and 5.

9. Find the equation of the circle that touches the circle $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ externally at point $(6, 6)$ and has its centre on the line $x = 12$.



தரப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் C_1 எனக் தேவையான வட்டத்தின் மையம் C_2 எனக்

Then $C_1 \equiv (3, 2)$, $C_2 \equiv (12, a)$; where $a \in \mathbb{R}$

5

Since the circles touch externally C_2 lies on the line C_1A .

$$\therefore \frac{6-2}{6-3} = \frac{a-6}{12-6}$$

5

$$\therefore 3a - 18 = 24.$$

$$\therefore a = 14.$$

5

The radius of the required circle $C_2 = \sqrt{(12-6)^2 + (14-6)^2}$
 $= 10.$

5

Hence, the required equation is $(x-12)^2 + (y-14)^2 = 100.$

5

10. Show that $\cos 5\theta = \cos 3\theta$ if and only if $\theta = \frac{n\pi}{4}$ for $n \in \mathbb{Z}$.

Show also that $\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot 4\theta$ for $\theta \neq \frac{n\pi}{4}$ and $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cos 5\theta = \cos 3\theta$$

$$\Leftrightarrow 5\theta = 2n\pi \pm 3\theta \text{ for } n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 8\theta = 2n\pi \text{ or } 2\theta = 2n\pi \text{ for } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{n\pi}{4} \text{ or } \theta = n\pi \text{ for } n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{n\pi}{4} \text{ for } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = \frac{2 \cos 4\theta \sin \theta}{-2 \sin 4\theta \sin \theta} \quad (5)$$

$$= -\cot 4\theta \quad (5)$$

25



Part B

* Answer five questions only.

11. (a) Let $0 < |p| < 1$. Show that the equation $p^2x^2 - 2x + 1 = 0$ has real distinct roots.

Let α and β ($\beta > \alpha$) be these roots. Show that α and β are both positive.

Find $(\alpha-1)(\beta-1)$ in terms of p , and deduce that $\alpha < 1$ and $\beta > 1$.

$$\text{Show that } \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|} \sqrt{2(1-|p|)}$$

It is given that $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|} \sqrt{2(1+|p|)}$. Show that the quadratic equation whose roots are

$$|\sqrt{\alpha}-1| \text{ and } |\sqrt{\beta}-1| \text{ is } |p|x^2 - \sqrt{2(1-|p|)}x + \sqrt{2(1+|p|)} - |p| - 1 = 0.$$

(b) Let $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$, where $a, b \in \mathbb{R}$. It is given that $(x+2)$ is a factor of both $p(x)$ and $p'(x)$, where $p'(x)$ is the derivative of $p(x)$ with respect to x . Find the values of a and b . For these values of a and b , completely factorise $p(x) - 3p'(x)$.

(a)

$$0 < |p| < 1.$$

$$p^2x^2 - 2x + 1 = 0. \text{ இன் பிரித்துக்காட்டி } \Delta \text{ என்க}$$

$$p^2 < 1. \text{ ஆதலால் } \therefore \Delta = 4 - 4p^2 = 4(1 - p^2) > 0,$$

5

5

$\therefore$ சமன்பாடு இரு வேறுவேறான மெய் மூலங்களை கொண்டிருக்கும்

5

15

α, β ($\beta > \alpha$) ஆகியன மூலகங்கள் என்க.

$$\text{எனின் } \alpha\beta = \frac{1}{p^2} > 0. \quad 5$$

α and β இரண்டும் நேரானவை அல்லது மறையானவை.

$$\text{எனினும் } \alpha + \beta = \frac{2}{p^2} > 0 \text{ ஆதலால் } \alpha, \beta \text{ இரண்டும் நேரானது.}$$

5

5

15

$$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1 = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} + 1 = \frac{p^2-1}{p^2} < 0 \text{ and } \alpha-1 < \beta-1.$$

5

5

5

$$\therefore \alpha-1 < 0 \text{ and } \beta-1 > 0.$$

5

$$\therefore \alpha < 1 \text{ and } \beta > 1.$$

20

$$(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2 = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = \frac{2}{p^2} - 2\frac{1}{|p|} = \frac{2}{p^2}(1 - |p|).$$

$$\therefore \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|} \sqrt{2(1 - |p|)}$$

15

தேவையான சமன்பாடு $(x - |\sqrt{\alpha} - 1|)(x - |\sqrt{\beta} - 1|) = 0.$

10

$$x^2 - (|\sqrt{\alpha} - 1| + |\sqrt{\beta} - 1|)x + |\sqrt{\alpha} - 1||\sqrt{\beta} - 1| = 0$$

$$|\sqrt{\alpha} - 1| = 1 - \sqrt{\alpha}, |\sqrt{\beta} - 1| = \sqrt{\beta} - 1 \text{ ஆதலால்}$$

$$x^2 - (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})x + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha\beta} - 1 = 0$$

5

$$\therefore x^2 - \frac{1}{|p|} \sqrt{2(1 - |p|)}x + \frac{1}{|p|} \sqrt{2(1 + |p|)} - \frac{1}{|p|} - 1 = 0$$

$$\therefore |p|x^2 - \sqrt{2(1 - |p|)}x + \sqrt{2(1 + |p|)} - |p| - 1 = 0$$

5

20

$$p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$$

$$\therefore p'(x) = 6x^2 + 2ax + b.$$

5

$(x + 2)$ ஆனது $p(x)$, இன் காரணி ஆதலால்

$$p(-2) = 0.$$

5

$$\text{இப்போது, } p(-2) = -16 + 4a - 2b - 4 = 0.$$

5

$$\therefore 2a - b = 10 \text{ ----- (1)}$$

$(x + 2)$ ஆனது $p'(x)$, இன் காரணி ஆதலால்

$$p'(-2) = 0.$$

5

$$\text{இப்போது, } p'(-2) = 24 - 4a + b = 0.$$

5

$$\therefore 4a - b = 24. \text{ ----- (2)}$$

(1) and (2) $\Rightarrow a = 7$ and $b = 4$.

(5) (5)

35

$$p(x) - 3p'(x) = (2x^3 + 7x^2 + 4x - 4) - 3(6x^2 + 14x + 4) \quad (5)$$

$$= (x+2)(2x^2 + 3x - 2) - 3(x+2)(6x+2) \quad (5)$$

$$= (x+2)[2x^2 + 3x - 2 - 18x - 6]$$

$$= (x+2)(2x^2 - 15x - 8) \quad (5)$$

$$= (x+2)(2x+1)(x-8)$$

(5) (5) (5)

30

வேறு முறை:

$$p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$$

$(x+2)$ ஆனது $p(x)$, $p'(x)$ இரண்டினதும் காரணி ஆகையால்

$$p(x) = (x+2)^2(2x+k). \quad (5) \quad \text{இங்கு } k \text{ ஒரு மாறிலி.}$$

10

மாறிலிகளை ஒப்பிட $4k = -4$

$$\therefore k = -1 \quad (5)$$

$$\therefore p(x) = (x+2)^2(2x-1).$$

$$\therefore p(x) = (x^2 + 4x + 4)(2x-1) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4. \quad (5)$$

x : இன் குணங்களை ஒப்பிட $b = 4$ and $a = 7$.

(5)

(5)

$$\therefore p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$$

$$\therefore p'(x) = 6x^2 + 14x + 4 = 2(3x^2 + 7x + 2) = 2(x+2)(3x+1) \quad (5)$$

$$\therefore p(x) - 3p'(x) = (x+2)^2(2x-1) - 3(2(x+2)(3x+1)) \quad (5)$$

$$= (x+2)[(x+2)(2x-1) - 6(3x+1)]$$

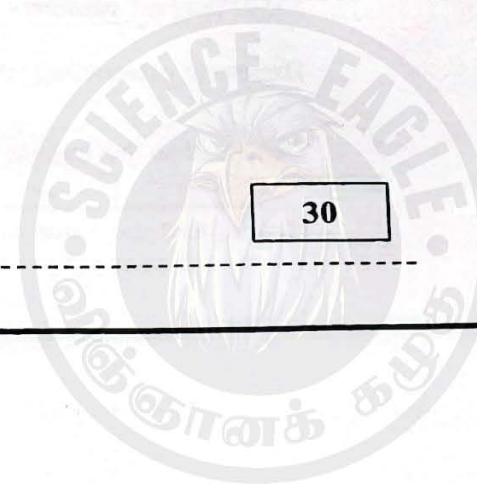
$$= (x+2)(2x^2 - 15x - 8) \quad (5)$$

$$= (x+2)(2x+1)(x-8) \quad (5)$$

$$(5)$$

$$(5)$$

30



12.(a) Six mangoes and four oranges are to be distributed among eight students so that each receives at least one fruit.

Find the number of different ways in which

- six students get one fruit each and out of the remaining two students one gets two mangoes and the other gets two oranges,
- seven students get one fruit each, and the other student gets three mangoes,
- seven students get one fruit each, and the other student gets three fruits.

(b) Let $U_r = \frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ for $r \in \mathbb{Z}^+$. Also, let $f(r) = \frac{A}{(2r+1)} + \frac{B}{(2r+3)}$ for $r \in \mathbb{Z}^+$, and B are real constants. Determine the values of A and B such that $U_r = f(r) - f(r+1)$ for

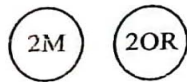
Hence or otherwise, show that $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$ for $n \in \mathbb{Z}^+$.

Deduce that the infinite series $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ is convergent and find its sum.

Hence, find the value of the real constant k such that $\sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1}) = 1$.

(a) (i)

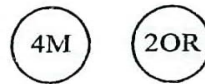
2 மாணவர்கள்



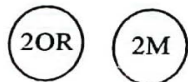
$8C_2$

x

6 மாணவர்கள்

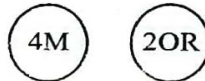


$${}^6C_4 \times {}^2C_2$$



$8C_2$

x



$${}^6C_4 \times {}^2C_2$$

தேவையான வழிகள் : $2 \times {}^8C_2 \times {}^6C_4 \times {}^2C_2$

$$= 2 \times \frac{8!}{6!2!} \times \frac{6!}{4!2!} = 2 \times 28 \times 15 = 840.$$

5

5

$$\begin{matrix} \textcircled{3M} \\ {}^8C_1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \textcircled{3M} \textcircled{4OR} \\ {}^7C_3 \times {}^4C_4 \end{matrix}$$

தேவையான வழிகள்: ${}^9C_1 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4 = 8 \times 4 \times \frac{7!}{4!3!} = 8 \times 35 = 280$.

$$\begin{matrix} \textcircled{5} \textcircled{5} \\ \end{matrix} \quad \textcircled{5}$$

15

(iii) 3- பழம் :

$$\begin{matrix} \textcircled{3M} + \textcircled{3OR} \textcircled{2M} + \textcircled{1OR} \textcircled{1M} + \textcircled{2OR} \end{matrix} \quad \textcircled{5}$$

4 வகைகள்

$\textcircled{3M}$ வகை 280 வழிகள் (ii) இல் உள்ளவாறு

$\textcircled{3OR}$ வகை ${}^8C_1 \times {}^7C_6 \times {}^1C_1 = 8 \times 7 = 56$ வழிகள்

5

$\textcircled{2M} + \textcircled{1OR}$ வகை ${}^8C_1 \times {}^7C_4 \times {}^3C_3 = 8 \times 35 = 280$ வழிகள்

5

$\textcircled{1M} + \textcircled{2OR}$ வகை ${}^8C_1 \times {}^7C_5 \times {}^2C_2 = 8 \times 21 = 168$ வழிகள்

5

தேவையான வழிகள் = $280 + 56 + 280 + 168$

= 784

5

25

வேறு முறை:

(a) மாம்பழங்கள் 6; தோடம்பழங்கள் 4; மாணவர்கள் 8.

(i) ஒரு மாணவனுக்கு 2 மாம்பழங்களும், இன்னொருவருக்கு 2 தோடம் பழங்களும்

வழங்கப்படுவதால் 6 மாணவர்கள் 4 மாம்பழங்கள், 2 தோடம்பழங்களில் இருந்து ஒவ்வொன்றை பெறுவர்.

							2Ma	2Or
--	--	--	--	--	--	--	-----	-----

4 மாம்பழங்களும், 2 தோடம்பிங்களும் 6 மாணவர்களுக்கிடையில் (ஒன்று வீதம்) பங்கிடப்படும் வழிகள்

$$= \frac{6!}{4!2!} \quad (10)$$

8 மாணவர்களிலிருந்து ஒரு மாணவர் தெரிவு செய்யப்பட்டு 2 மாம்பழங்களை வழங்குவதற்கான வழிகள் $= {}^8C_1$

7 மாணவர்களிலிருந்து மற்றுமொரு மாணவன் தெரிவு செய்யப்பட்டு 2 தோடம்பழங்களை வழங்குவதற்கான வழிகள் $= {}^7C_1$ (5)

$$\begin{aligned} \text{தேவையான வழிகள்} &= \frac{6!}{4!2!} \times {}^8C_1 \times {}^7C_1 \\ &= 840 \text{ ways.} \end{aligned} \quad (5)$$

OR

$$\begin{aligned} &= \frac{6!}{4!2!} \times {}^8P_2 \\ &= 840 \text{ ways.} \end{aligned}$$

25

(ii) 7 மாணவர்கள் ஒவ்வொரு பழம் வீதமும் ஒரு மாணவன் மூன்று மாம்பழங்களையும் பெறுகையில்

							3Ma
--	--	--	--	--	--	--	-----

3 மாம்பழங்களும் 4 தோடம்பிங்களும் ஆளுக்கு ஒவ்வொன்று வீதம் 7 மாணவர்களிடையே

$$\text{பகிந்தளிக்கக் கூடிய வழிகள்} = \frac{7!}{4!3!} \quad (5)$$

எட்டு மாணவர்களிலிருந்து ஒரு மாணவன் தெரிவு செய்யப்பட்டு 3 மாம்பழங்களை வழங்குவதற்கான வழிகள் $= {}^8C_1$ (5)

$$\begin{aligned} \therefore \text{தேவையான வழிகள்} &= {}^8C_1 \times \frac{7!}{4!3!} \\ &= 280 \text{ ways.} \end{aligned} \quad (5)$$

(iii)

3 பழங்கள் ஒரு மாணவனுக்கு வழங்கல		7 பழங்கள் 7 மாணவர்களுக்கு வழங்கல		தேவையான வழிகள்
மாம்பழம்	தோடம்பழம்	மாம்பழம்	தோடம்பழம்	
3	0	3	4	$= {}^8C_1 \times \frac{7!}{3!4!} = 280$
2	1	4	3	$= {}^8C_1 \times \frac{7!}{4!3!} = 280$

(5)

(5)

1	2	5	2	$= {}^8C_1 \times \frac{7!}{5!2!} = 168$	5
0	3	6	1	$= {}^8C_1 \times \frac{7!}{6!} = 56$	5

தேவையான வழிகள்

$$= 280 + 280 + 168 + 56$$

$$= 784$$

5

25

(b). $r \in \mathbb{Z}^+$

$$U_r = \frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$$

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \frac{A}{2r+1} + \frac{B}{2r+3} - \frac{A}{2r+3} - \frac{B}{2r+5}$$

$$\therefore 4(2r+7) = A(2r+3)(2r+5) + (B-A)(2r+1)(2r+5) - B(2r+1)(2r+3)$$

$$= (4A+4B)r + 10A - 2B$$

Any Method

10

 r இன் அடுக்குகளின் குணங்களை ஒப்பிட

$$r: 8 = 4A + 4B \Rightarrow 2 = A + B$$

$$r^0: 28 = 10A + 2B \Rightarrow 14 = 5A + B$$

$$\left. \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \right\} A = 3, B = -1$$

25

$$U_r = f(r) - f(r+1) \quad \text{இங்கு} \quad f(r) = \frac{3}{2r+1} - \frac{1}{2r+3}$$

$$r=1; U_1 = f(1) - f(2)$$

$$r=2; U_2 = f(2) - f(3)$$

$$r=n-1; U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$$

5

$$r = n; \quad U_n = f(n) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^n U_r = f(1) - f(n+1) \quad (5)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n U_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \quad (5) \quad r \in \mathbb{Z}$$

30

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n U_r \quad (5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right)$$

$$= \frac{4}{5} \quad (5)$$

$\therefore$ முடிவிலி தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஆனது ஒருங்கும் அதன் கூட்டுத்தொகை $\frac{4}{5}$.

5

15

$$U_r = \frac{3}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$U_{r+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7}$$

$$= \frac{16}{35}$$

$$1 = \sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1})$$

$$= (1+k) \left(\sum_{r=1}^{\infty} U_r \right) - kU_1 \quad (5)$$

$$= (1+k) \left(\frac{4}{5} \right) - k \left(\frac{12}{35} \right) \quad (5)$$

$$\therefore k = \frac{7}{16} \quad (5)$$

15

13.(a) Let $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$. Show that A^{-1} exists for all $a \in \mathbb{R}$.

The matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ and $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ are such that

$A = PQ^T + R$. Show that $a = 1$.

For this value of a , write down A^{-1} and hence, find the values of x and y such that

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(b) Let $z, w \in \mathbb{C}$. Show that $z\bar{z} = |z|^2$ and hence, show that $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$.

Deduce that $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ and give a geometric interpretation for it when the points representing z, w and 0 in the Argand diagram are non-collinear.

(c) Let $z = -1 + \sqrt{3}i$. Express z in the form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, where $r > 0$ and $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Let $z^n = a_n + ib_n$, where $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{Z}^+$. Write down $\operatorname{Re}(z^m \cdot z^n)$ in terms of a_m, a_n, b_m and b_n for $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Considering z^{m+n} and using De Moivre's theorem, show that $a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n} \cos(m+n) \frac{2\pi}{3}$, for $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) $|A| = a(a+2) + 2 = a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \neq 0$ for all $a \in \mathbb{R}$.

5

$\therefore$ எல்லா $a \in \mathbb{R}$ இற்கு A^{-1} உண்டு

5

15

$$A = PQ^T + R$$

5

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5

5

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5

$$a = 1 \quad \text{and} \quad a + 2 = 3.$$

$$\therefore a = 1$$

5

25

When $a=1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

10

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10

$$\therefore \begin{pmatrix} 5 \\ x=1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 5 \\ y=3 \end{pmatrix}$$

30

(b) Taking $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

5

5

10

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w})$$

5

$$= (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$$

5

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$

5

$$= |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2$$

$$= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$

5

20

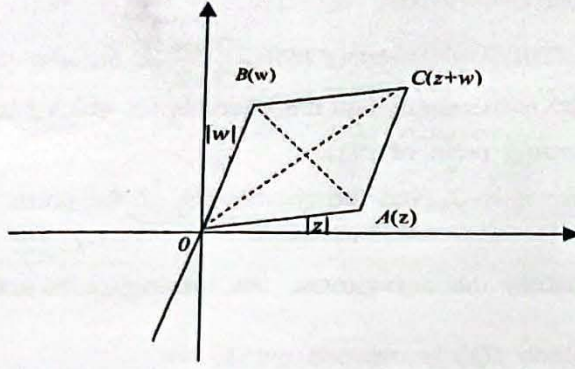
Note that $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ by

5

$$\therefore |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

5





If z, w and 0 are non-collinear, then $OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2)$.

($\because OC = |z + w|$ and $AB = |z + w|$.)

ஒரு இணைகரத்தில் மூலை விட்டங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையானது அதன் பக்க நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கு சமனாகும்.

5

15

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ 10 / 5

5

இங்கு $r = 2$, and $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

15

$\text{Re}(z^m z^n) = \text{Re}[(a_m + ib_m)(a_n + ib_n)] = a_m a_n - b_m b_n$ ----- (1)

5

05

$z^m z^n = z^{m+n} = \left[2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right]^{n+m} = 2^{m+n} \left[\cos \frac{2(m+n)\pi}{3} + i \sin \frac{2(m+n)\pi}{3}\right]$

$\therefore \text{Re}(z^m z^n) = 2^{m+n} \cos(m+n) \frac{2\pi}{3}$ ----- (2)

5

(1) and (2) $\Rightarrow a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n} \cos(m+n) \frac{2\pi}{3}$.

15

14.(a) Let $f(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2}$ for $x \neq -2$.

Show that $f'(x)$, the derivative of $f(x)$, is given by $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ for $x \neq -2$.

Hence, find the interval on which $f(x)$ is increasing and the intervals on which $f(x)$ is decreasing. Also, find the coordinates of the turning point of $f(x)$.

It is given that $f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ for $x \neq -2$. Find the coordinates of the point of inflection of the graph of $y = f(x)$.

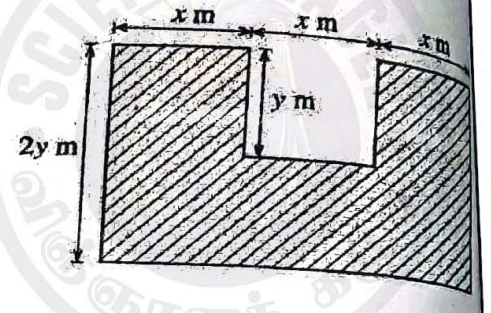
Sketch the graph of $y = f(x)$ indicating the asymptotes, the turning point and the point of inflection.

State the smallest value of k for which $f(x)$ is one-one on $[k, \infty)$.

(b) The shaded region shown in the figure is of area 45 m^2 .

It is obtained by removing a rectangle of length $x \text{ m}$ and width $y \text{ m}$ from a rectangle of length $3x \text{ m}$ and width $2y \text{ m}$. Show that the perimeter $L \text{ m}$ of the shaded region is given by $L = 6x + \frac{54}{x}$ for $x > 0$.

Find the value of x such that L is minimum.



(a) For $x \neq -2$, ஆக $f(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2(2) - 2(2x+3)(x+2)}{(x+2)^4}$$

20

$$= \frac{2(x+2)[x+2-2x-3]}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$$

5

25

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

5

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < \infty$
$f'(x)$ இன் குறி	(-)	(+)	(-)
$f(x)$ is	குறைவடைகின்றது ↘	அதிகரிக்கின்றது ↗	குறைவடைகின்றது ↘

5

5

5

$\therefore f(x)$ ஆனது $(-2, -1]$ and இல் அதிகரிக்கின்றது அத்துடன்
 $(-\infty, -2), [-1, \infty)$ இல் குறைவடைகின்றது

20

திரும்பப் புள்ளி $(-1, 1)$ ஆனது ஓரிட உயர்வாகும்

5

5

$$f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

5

	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \infty$
$f''(x)$ இன் குறி	(-)	(+)
குவிவுத்தன்மை	கீழ்நோக்கி குவிந்தது	மேல்நோக்கி குவிந்தது

5

5

$\therefore$ the point of inflection is $\left(-\frac{1}{2}, \frac{8}{9}\right)$ விபத்தி புள்ளியாகும்

5

$$x - \text{intercept: } \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

5

5

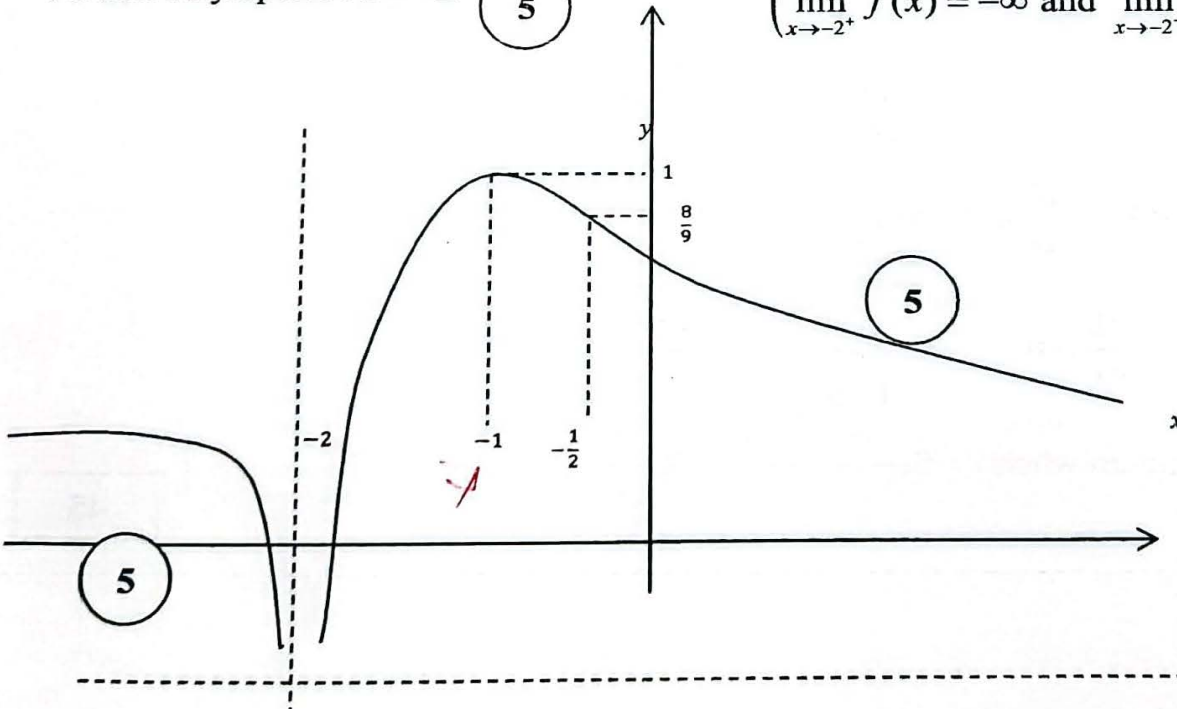
$$\text{Horizontal Asymptote: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\therefore y = 0$$

$$\text{Vertical Asymptote: } x = -2$$

5

$$\left(\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \text{ and } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \right)$$



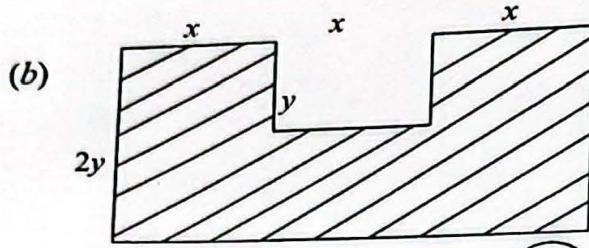
55

$f(x)$ ஆனது $[k, \infty)$ இன்மேல் ஒன்றுக்கொன்றானது ஆக k , இன்

மிகக்குறைந்த பொறுமானம் $k = -1$.

5

05



for $x > 0$, $y > 0$

5

5

நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பு $45 = (3x)(2y) - xy$

$$\therefore 45 = 5xy$$

$$\therefore y = \frac{9}{x}$$

5

$$L = 6x + 6y$$

10

$$= 6x + \frac{54}{x} \quad \text{for } x > 0$$

5

$$\frac{dL}{dx} = 6 - \frac{54}{x^2} = \frac{6(x^2 - 9)}{x^2} = \frac{6(x-3)(x+3)}{x^2}$$

5

$$\frac{dL}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

5

For $0 < x < 3$, $\frac{dL}{dx} < 0$ and

For $x > 3$, $\frac{dL}{dx} > 0$.

5

$\therefore L$ is minimum when $x = 3$.

45

15.(a) Find the values of the constants A , B and C such that

$$x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \text{ for all } x \in \mathbb{R}.$$

Hence, write down $\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}$ in partial fractions and find $\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)} dx$.

(b) Show that $1 + \sin 2x = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ and hence, show that $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2x} dx = 1$.

(c) Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2} dx$. Using integration by parts, show that $I = -\frac{\pi^2}{8} + J$, where $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx$.

Using the relation $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ and the result in (b), evaluate J and show that $I = \frac{\pi}{8}(2-\pi)$.

(a)

$$\begin{aligned}x^2 + x + 2 &= A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \\&= (A + B)x^2 + (A + B + C)x + A + C\end{aligned}$$

௨ இனது அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிட:

$$x^0: z = A + C$$

$$x : \quad 1 = A + B + C$$

$$x^2: \quad 1 = A + B$$

$$\therefore \underline{A=2}, \underline{B=-1} \text{ and } C=0. \quad (5)$$

5

5

20

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} \quad (5)$$

$$\therefore \int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)} dx = 2 \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{x}{x^2+x+1} dx \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\
 &= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \tan^{-1} \frac{(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C
 \end{aligned}$$

$x^2+x+1 > 0$

$$= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C, \text{ where } C \text{ is an arbitrary constant.}$$

40

(b)

$$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x\right)^2$$

$$= (\cos x + \sin x)^2$$

$$= 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$= 1 + \sin 2x$$

15

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-1}{2} \left(\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \tan \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{-1}{2}(-1-1)$$

$$= 1 \quad (5)$$

25

$$(C) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2} dx$$

$$= x^2 \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{1}{1 + \sin 2x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx \quad (5)$$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{1+0} \quad (5) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + J. \quad (5)$$

25

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{1 + \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \quad (5)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2x} dx - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx}_J \quad (5)$$

$$\therefore 2J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2x} dx \quad (5)$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

$$\therefore I = \frac{-\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(2 - \pi) \quad (5)$$

25

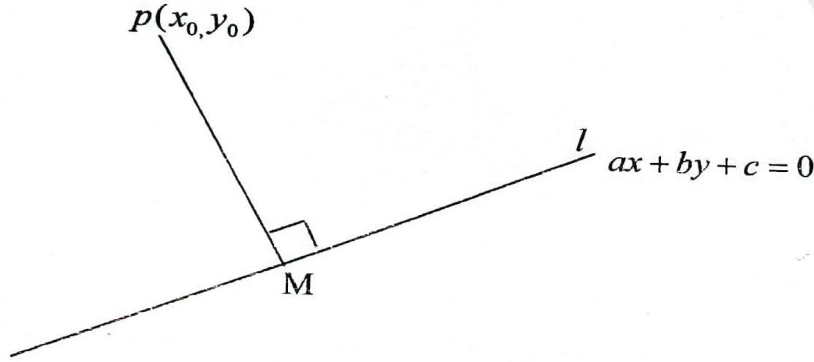
16. Let $P \equiv (x_0, y_0)$ and l be the straight line given by $ax + by + c = 0$. Show that the perpendicular distance from P to l is $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Let l_1 and l_2 be two straight lines given by $4x - 3y + 8 = 0$ and $3x - 4y + 13 = 0$, respectively. Show that l_1 and l_2 intersect at $A \equiv (1, 4)$.

Also, show that the parametric equations of the bisector of the acute angle between l_1 and l_2 can be written as $x = t$ and $y = t + 3$, where $t \in \mathbb{R}$.

Hence, show that the equation of any circle touching both straight lines l_1 and l_2 , and lying in the region between l_1 and l_2 that contains the acute angle, is given by $(x - t)^2 + (y - t - 3)^2 = \frac{1}{25}(t - 1)^2$, where $t \in \mathbb{R}$ and $t \neq 1$.

From among the above circles, find the equations of the circles that intersect the circle centred at A of radius 1, orthogonally.



இங்கு $a^2 + b^2 \neq 0$

நேர்கோடு PM இன் சமன்பாடு $(y - y_0) = \frac{a}{b}(x - x_0)$ (5)

P இனூடாக செல்வதும் l இற்கு செங்குத்தானதுமான கோட்டிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி

$(x_0 + at, y_0 + bt)$ for $t \in \mathbb{R}$. இனால் தரப்படும். (5)

M ஆனது l இல் உள்ளது; $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$ (5)

$$\therefore t(a^2 + b^2) = -ax_0 + by_0 + c$$

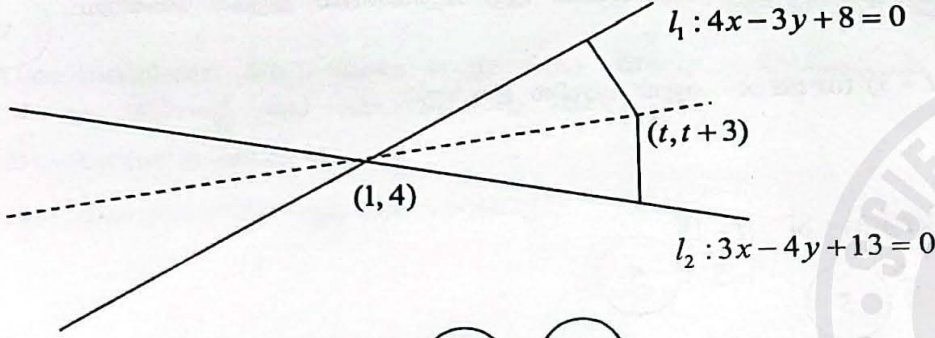
$$\therefore t = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{தேவையான தூரம் } PM &= \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} |t| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

5

5

30



5

5

A இன் ஆள்கூறுகளை l_1 and l_2 இல் பிரதியிட, l_1 and l_2 ஆனது $A = (1, 4)$ இல் இடைவெட்டும்

5

15

கோண இரு கூறாக்கிகள் $\frac{4x-3y+8}{5} = \pm \frac{3x-4y+13}{5}$ இனால் தரப்படும்

10

The angle bisectors are $\underbrace{x+y-5=0}_{m=-1}$ and $x-y+3=0$.

5

5

Let θ be the acute angle between l_1 and $x_1 + y - 5 = 0$

$$\text{Then, } \tan \theta = \left| \frac{\frac{4}{3} - (-1)}{1 + \frac{4}{3}(-1)} \right| = 7 > 1$$

10

5

5

$\therefore$ கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கி $x - y + 3 = 0$

5

கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கி பரமனத்தில் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

Let $x = t$ for $t \in \mathbb{R}$.

5

Then $y = x + 3 = t + 3$.

5

55

தேவையான வட்டத்தின் மையம் கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கியில் இருக்க வேண்டும்

5

 $\therefore$ மையம் $(t, t+3)$ for $t \in \mathbb{R}$ எனும் வடிவில் இருக்கும்

$$\text{ஆரை} = \frac{|4t - 3(t+3) + 8|}{5} = \frac{|t-1|}{5}$$

5

5

 $\therefore$ சமன்பாடு

$$(x-t)^2 + (y-(t+3))^2 = \frac{1}{25}(t-1)^2$$

5

That is $(x-t)^2 + (y-t-3)^2 = \frac{1}{25}(t-1)^2$, where $t \in \mathbb{R}$.

5

25

நிமிர்கோணத்தில் இடைவெட்டும் வட்டங்களுக்கு பைதகரசு தேற்றத்தை பிரயோகிக்க

$$(t-1)^2 + (t+3-4)^2 = 1^2 + \frac{1}{25}(t-1)^2$$

10

$$\therefore (t-1)^2 = 25$$

$$\Rightarrow t-1=5 \text{ or } t-1=-5$$

$$\therefore t=6 \text{ or } t=-4$$

5

5

 $\therefore$ Equation of circle that intersects S orthogonally an $(x-6)^2 + (y-9)^2 = 1$, $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 1$

5

5

30

- 17.(a) Write down $\cos(A+B)$ in terms of $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$ and $\sin B$, and obtain a similar expression for $\sin(A-B)$.

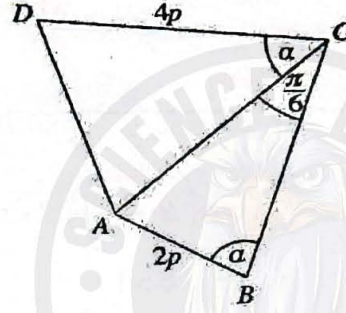
Let $k \in \mathbb{R}$ and $k \neq 1$. By separately considering the cases $k > 1$ and $k < 1$, express

$2k \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ in the form $R \cos(\theta + \alpha)$, where $R(> 0)$ in terms of k , and $\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$ are real constants to be determined.

Hence, solve $2k \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = |k-1|$.

- (b) In the quadrilateral $ABCD$ shown in the figure $AB = 2p$, $CD = 4p$, $\hat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ and $\hat{ABC} = \hat{ACD} = \alpha$. Show that $AD^2 = 16p^2(\sin^2 \alpha - \sin 2\alpha + 1)$.

Hence, show that if $AD = 4p$, then $\alpha = \tan^{-1}(2)$.



- (c) Solve, $\tan^{-1}(\ln x^{\frac{2}{3}}) + \tan^{-1}(\ln x) + \tan^{-1}(\ln x^2) = \frac{\pi}{2}$ for $x > 1$.

(a) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

5

$\sin(A-B) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (A-B)\right)$

5

$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + B\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cos B - \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \sin B$

5

$= \sin A \cos B - \cos A \sin B$

5

20

$2k \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

$= 2k \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) + 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{6} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} \right)$

10

$= k(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) + (\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta)$

5

$= (k-1)(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)$

$= 2(k-1) \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right)$

5

$= 2(k-1) \cos(\theta + \beta) \quad \text{where } \beta = \frac{\pi}{3}$

5

when $k > 1$ $2k \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2(k-1) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

where $R = 2(k-1)$ and $\alpha = \frac{\pi}{3}$. (5)

when $k < 1$ $2k \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2(1-k) \cos\left(\pi + \theta + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= 2(1-k) \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$

where $R = 2(k-1)$ and $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. (5)

35

$2k \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = |k-1|$

when $k > 1$

$2(k-1) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = k-1$

$\therefore \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (5)

$\Rightarrow \theta + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$. (5)

when $k < 1$

$2(1-k) \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 1-k$

$\therefore \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (5)

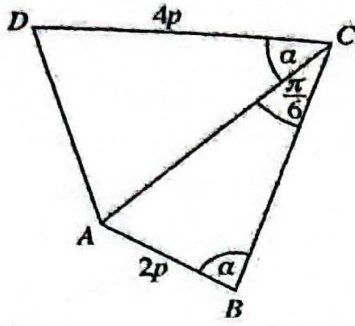
$\theta + \frac{4\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore \theta = 2n\pi - \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$.

(5)

20

(b) முக்கோணம் ABC : இற்கு சைன் விதி



10

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{2p}{\sin \frac{\pi}{6}} \Rightarrow b = 4p \sin \alpha \quad (5)$$

Cosine Rule for the triangle ACD :

$$\begin{aligned} AD^2 &= b^2 + (4p)^2 - 2b(4p)\cos \alpha \quad (10) \\ &= 16p^2 \sin^2 \alpha + 16p^2 - 2(4p)^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 16p^2 (\sin^2 \alpha - \sin 2\alpha + 1) \quad (5) \end{aligned}$$

30

If $AD = 4p$, the ADC is an isosceles triangle, we have

$$\sin^2 \alpha - \sin 2\alpha + 1 = 1$$

$$\sin \alpha (\sin \alpha - 2 \cos \alpha) = 0 \quad (5)$$

Since $\sin \alpha \neq 0$,

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \quad (5)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$$

$$\cos \alpha \neq 0$$

$\therefore$

$$\tan \alpha = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1}(2) \quad (5)$$

15

